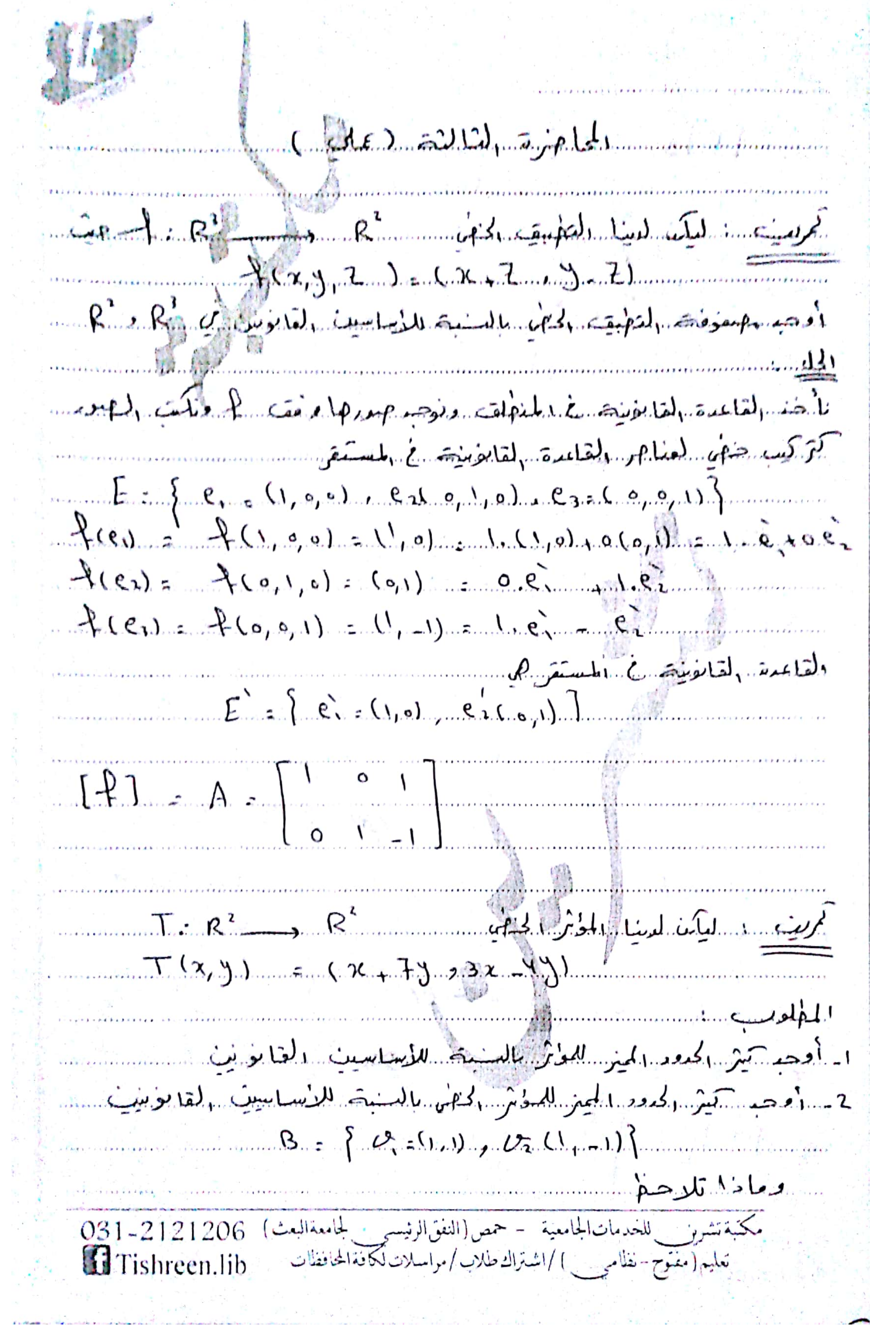


المحاضرة الثالثة (عملي)

تمرين: ليكن لدينا التطبيق الخطي $f : R^3 \longrightarrow R^2$ حيث

$$f(x,y,z) = (x+z\,,\,y-z)$$

أوجد مصفوفة التطبيق الخطي بالنسبة للأساسين القانونيين في R^3 و R^2

الحل:

نأخذ القاعدة القانونية في المنطلق ونوجد صورها وفق f ونكتب الصور كتركيب خطي لعناصر القاعدة القانونية في المستقر

$$E = \{ e_1 = (1,0,0)\,,\, e_2 = (0,1,0)\,,\, e_3 = (0,0,1) \}$$

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0) = 1.(1,0) + 0(0,1) = 1.e'_1 + 0.e'_2$$

$$f(e_2) = f(0,1,0) = (0,1) = 0.e'_1 + 1.e'_2$$

$$f(e_3) = f(0,0,1) = (1,-1) = 1.e'_1 - e'_2$$

القاعدة القانونية في المستقر R^2

$$E' = \{ e'_1 = (1,0)\,,\, e'_2 = (0,1) \}$$

$$[f] = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

تمرين: ليكن لدينا المؤثر الخطي $T : R^2 \longrightarrow R^2$

$$T(x,y) = (x+7y\,,\,3x-4y)$$

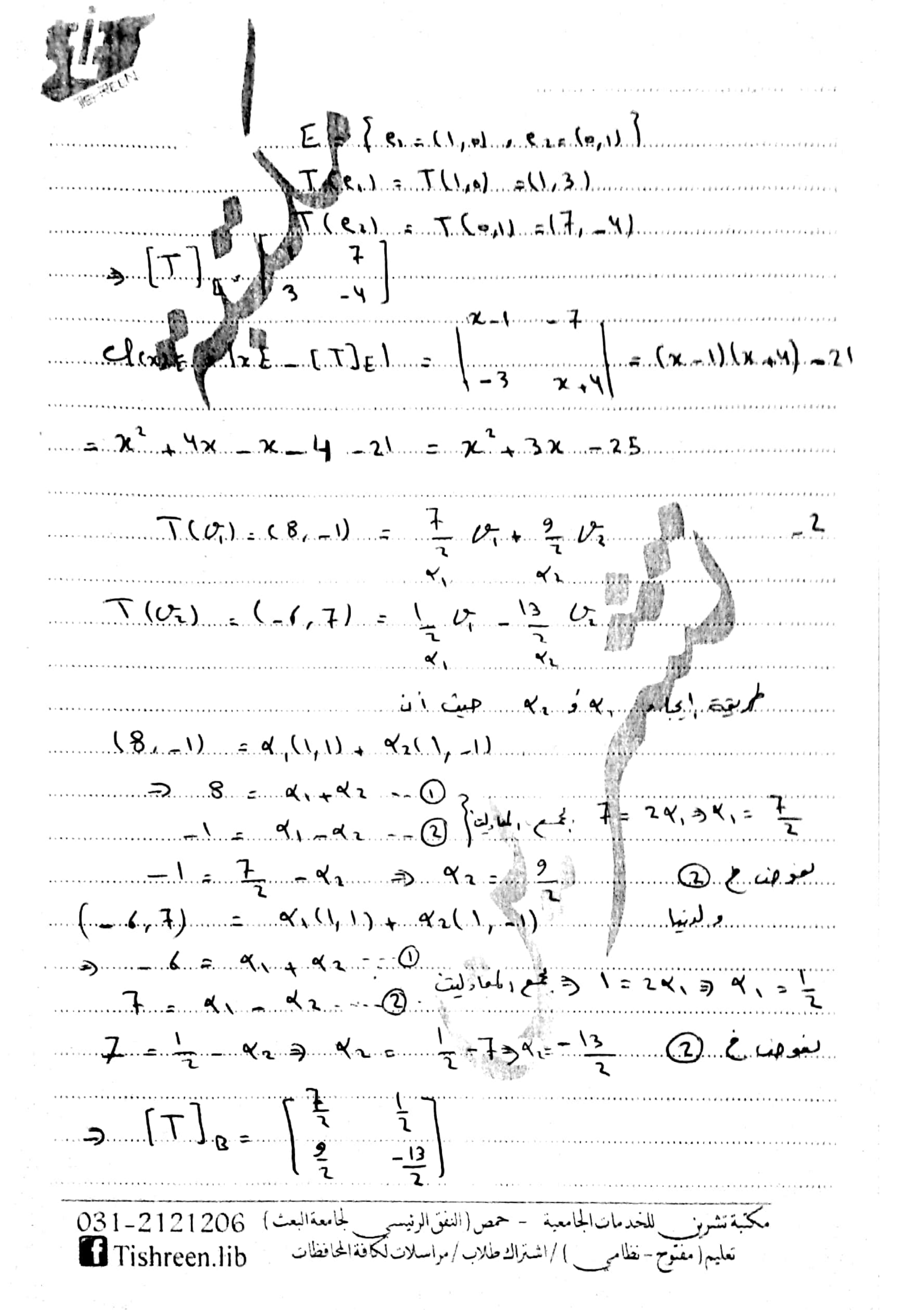
المطلوب:

1- أوجد كثير الحدود المميز للمؤثر بالنسبة للأساسين القانونيين

2- أوجد كثير الحدود المميز للمؤثر الخطي بالنسبة للأساسين القانونيين

$$B = \{ v_1 = (1,1)\,,\, v_2 = (1,-1) \}$$

وماذا تلاحظ



$E = \{ e_1 = (1,0) \ , \ e_2 = (0,1) \}$

$T(e_1) = T(1,0) = (1,3)$

$T(e_2) = T(0,1) = (7,-4)$

$\Rightarrow [T]_E = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

$ch(x)_E = |xI_E - [T]_E| = \begin{vmatrix} x-1 & -7 \\ -3 & x+4 \end{vmatrix} = (x-1)(x+4) - 21$

$= x^2 + 4x - x - 4 - 21 = x^2 + 3x - 25$

2-

$T(v_1) = (8,-1) = \underset{\alpha_1}{\frac{7}{2}} v_1 + \underset{\alpha_2}{\frac{9}{2}} v_2$

$T(v_2) = (-6,7) = \underset{\alpha_1}{\frac{1}{2}} v_1 - \underset{\alpha_2}{\frac{13}{2}} v_2$

طريقة إيجاد α_1 و α_2 حيث أن

$(8,-1) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1)$

$\Rightarrow 8 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{...} (1)$

$-1 = \alpha_1 - \alpha_2 \quad \text{...} (2)$ } بجمع المعادلات: $7 = 2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{7}{2}$

$-1 = \frac{7}{2} - \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{9}{2}$ نعوض في (2)

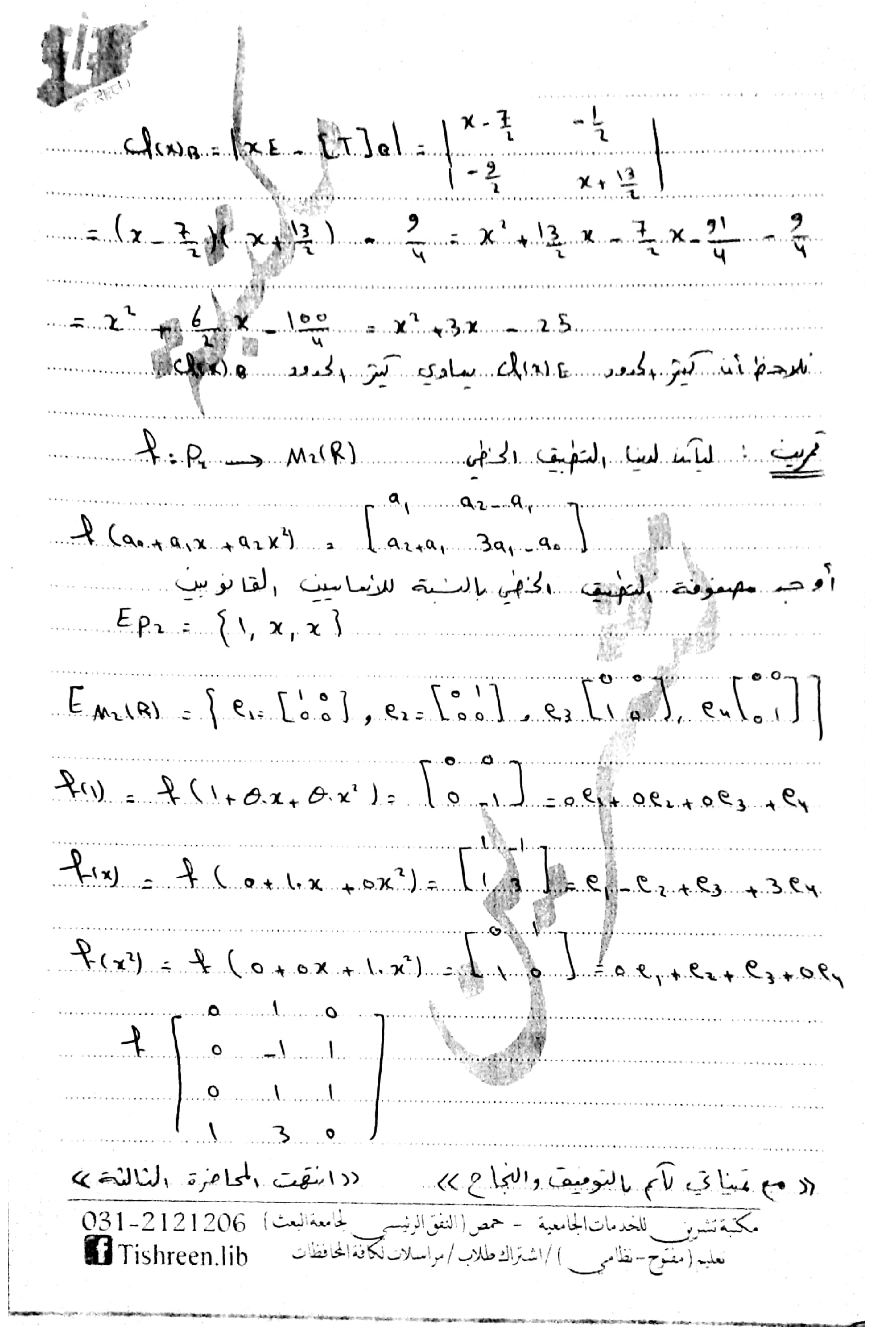
$(-6,7) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1)$ وبالمثل

$\Rightarrow -6 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{...} (1)$

$7 = \alpha_1 - \alpha_2 \quad \text{...} (2)$ بجمع المعادلات $\Rightarrow 1 = 2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}$

$7 = \frac{1}{2} - \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2} - 7 \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{13}{2}$ نعوض في (2)

$\Rightarrow [T]_B = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$



$C_f(x)_B = |xE - [T]_B| = \begin{vmatrix} x-\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{9}{2} & x+\frac{13}{2} \end{vmatrix}$

$= (x-\frac{7}{2})(x+\frac{13}{2}) - \frac{9}{4} = x^2 + \frac{13}{2}x - \frac{7}{2}x - \frac{91}{4} - \frac{9}{4}$

$= x^2 + \frac{6}{2}x - \frac{100}{4} = x^2 + 3x - 25$

نلاحظ أن كثير الحدود $C_f(x)_E$ يساوي كثير الحدود $C_f(x)_B$

تمرين: ليكن لدينا التطبيق الخطي $f: P_2 \to M_2(R)$

$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 - a_1 \\ a_2 + a_1 & 3a_1 - a_0 \end{bmatrix}$

أوجد مصفوفة التطبيق الخطي بالنسبة للأساسين القانونيين

$E_{P_2} = \{1, x, x\}$

$E_{M_2(R)} = \{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \}$

$f(1) = f(1 + 0.x + 0.x^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + e_4$

$f(x) = f(0 + 1.x + 0x^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = e_1 - e_2 + e_3 + 3e_4$

$f(x^2) = f(0 + 0x + 1.x^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0e_1 + e_2 + e_3 + 0e_4$

$f \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

« مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح » « انتهت المحاضرة الثالثة »